

**ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 01.12.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ**

**1.** На бесконечной клетчатой плоскости отмечено несколько клеток, причём у чётного числа из них отмечены все четыре соседа по стороне, а у оставшихся ровно два. Докажите, что всего отмечено чётное число клеток.

**2.** Обозначим за  $p(n)$  количество различных простых делителей  $n$ . Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$ , для которых число  $p(n+1) - p(n)$  чётно.

**3.** Касательные в точках  $A$  и  $B$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $F$ .  $A_1$  и  $B_1$  — середины сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $FAB_1$  и  $FBA_1$  пересекаются в точке  $L$ . Отрезок  $FL$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ . Докажите, что  $L$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  и  $K$  лежат на одной окружности.

**4.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — различные вещественные корни уравнения  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Докажите, что

$$x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

---

**ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 01.12.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ**  
**ВЫВОД**

5. Дано простое  $p > 3$ . Для каждого натурального  $n < p$  обозначим через  $x_n$  наименьшее натуральное число, для которого  $nx_n$  даёт при делении на  $p$  остаток 1. Какой остаток даёт при делении на  $p$  число  $\sum_{n=1}^{p-1} n \left[ \frac{nx_n}{p} \right]$ ?

6. Дана равнобедренная трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Окружность  $\Omega$  с центром в точке  $M$  на прямой  $AD$  проходит через точки  $B$  и  $C$  и повторно пересекает описанные окружности треугольников  $BAM$  и  $BDM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Прямые  $PQ$  и  $AD$  пересекаются в точке  $T$ . Докажите, что прямая  $TC$  касается окружности  $\Omega$ .

7. Дан граф  $G$  и натуральное число  $n > 1$ . Известно, что вершины графа  $G$  нельзя правильным образом раскрасить в  $n$  цветов. Докажите, что в графе  $G$  существует простой цикл длины  $k(n - 1) + 2$  для некоторого натурального  $k$ .

---

**ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 01.12.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ**

1. На бесконечной клетчатой плоскости отмечено несколько клеток, причём у чётного числа из них отмечены все четыре соседа по стороне, а у оставшихся ровно два. Докажите, что всего отмечено чётное число клеток.

2. Обозначим за  $p(n)$  количество различных простых делителей  $n$ . Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$ , для которых число  $p(n+1) - p(n)$  чётно.

3. Касательные в точках  $A$  и  $B$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $F$ .  $A_1$  и  $B_1$  — середины сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $FAB_1$  и  $FBA_1$  пересекаются в точке  $L$ . Отрезок  $FL$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ . Докажите, что  $L$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  и  $K$  лежат на одной окружности.

4. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — различные вещественные корни уравнения  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Докажите, что

$$x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

5. Дано простое  $p > 3$ . Для каждого натурального  $n < p$  обозначим через  $x_n$  наименьшее натуральное число, для которого  $nx_n$  даёт при делении на  $p$  остаток 1. Какой остаток даёт при делении на  $p$  число  $\sum_{n=1}^{p-1} n \left[ \frac{nx_n}{p} \right]$ ?

6. Дана равнобедренная трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Окружность  $\Omega$  с центром в точке  $M$  на прямой  $AD$  проходит через точки  $B$  и  $C$  и повторно пересекает описанные окружности треугольников  $BAM$  и  $BDM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Прямые  $PQ$  и  $AD$  пересекаются в точке  $T$ . Докажите, что прямая  $TC$  касается окружности  $\Omega$ .

7. Дан граф  $G$  и натуральное число  $n > 1$ . Известно, что вершины графа  $G$  нельзя правильным образом раскрасить в  $n$  цветов. Докажите, что в графе  $G$  существует простой цикл длины  $k(n-1) + 2$  для некоторого натурального  $k$ .

---